4th International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences

November 20-21, 2023 : Konya, Turkey

AS-Proceedings
https://alls-academy.com/index.php

https://www.iceans.org/

Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda $\mathcal{J}$-Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Saime KOLANCI[1*] ve Mehmet GÜRDAL [1]

[1]Matematik Bölümü, Süleyman Demirel Üniversitesi, Türkiye

*(saimekolanci@sdu.edu.tr)

***Özet* –** Bu çalışmada genelleştirilmiş metrik uzaylarda alınan bir dizi için $G\mathcal{J}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık ve $GN_\theta(\mathcal{J})$-yakınsaklık kavramları tanıtılarak klasik anlamda bilinen bazı ifadeler bu uzaylara genelleştirilmiştir. Ayrıca $G\mathcal{J}$-lacunary istatistiksel yakınsaklık ile $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsaklık ve $GN_\theta(\mathcal{J})$-yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler – G-Metrik Uzaylar, İstatistiksel Yakınsaklık, Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık, İdeal Yakınsaklık

I. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramının Fast [3] tarafından tanıtılmasının ardından bu konuyla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış ve bu yeni yakınsama kavramının yardımıyla yeni tanımlar ortaya konmuştur. Bu kavramlardan birisi Fridy ve Orhan [6] tarafından verilen lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramıdır. Diğer yandan Kostyrko vd. [12] istatistiksel yakınsaklık ile ilişkili birçok yakınsaklık çeşidine genel bir bakış açısı kazandıran ideal yakınsaklığı tanımlamışlardır. Çalışmamıza ilham veren Das vd. [1] ve Savaş ve Das [17] çalışmalarında idealler yardımıyla istatistiksel yakınsaklık kavramına farklı bir bakış açısı sunmuş ve toplanabilirlik metotlarına yeni bir yaklaşım sağlamışlardır. Tüm bu çalışmalar doğrultusunda çeşitli çalışmalar yapılmıştır (bknz. [9], [15],[16], [18-21].)

Çalışmamızın bir diğer temel konusu olan genelleştirilmiş metrik uzaylarla ilgili ilk çalışmalar Gahler [7,8] ve ardından Dhage [2] tarafından yapılmıştır. Ancak bu çalışmalardaki bazı aksiyomatik yetersizliklerden kaynaklanan sorunlar doğrulsunda Mustada ve Sims [14] çalışmaları sonucunda metrik uzay kavramını en sağlıklı şekilde genelleyen tanımı vermişlerdir. Bu uzaylarda Küçük ve Gümüş [13] lacunary istatistiksel yakınsaklığı, Kolancı vd. [11] asimptotik lacunary denk dizileri ve Kolancı ve Gürdal [10] ise $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsaklığı tanıtmışlardır.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 1 [14]. $X \neq \emptyset$ ve $G: X \times X \times X \to \mathbb{R}^+$ biçiminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $a, b, c \in X$ için,

(i) $G(a,b,c) = 0 \Leftrightarrow a = b = c$
(ii) $a \neq b$ için $G(a,a,b) > 0$
(iii) $b \neq c$ için $G(a,a,b) \leq G(a,b,c)$
(iv) $G(a,b,c) = G(b,a,c) = \cdots = G(c,b,a)$
(v) Her $t \in X$ için
$$G(a,b,c) \leq G(a,t,t) + G(t,b,c)$$

şartlarını sağlıyorsa G, X üzerinde bir G-metriktir ve (X,G) ikilisine ise bir G-metrik uzay denir.

Bu uzaylardaki özellikler için [11] çalışmasına bakınız.

Tanım 2 [13]. (s_n), X uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \left|\{i,j \leq n: G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

sağlanıyorsa (s_n) dizisi s noktasına istatistiksel yakınsaktır denir.

Lacunary dizi tanımı ve lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı için [6] makalesine bakınız.

Tanım 3 [13]. (s_n), X uzayında bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{2}{{h_r}^2} \left|\left\{i,j \in I_r : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

sağlanıyorsa (s_n) dizisi s noktasına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu koşulu sağlayan bütün dizilerin kümesi GS_θ ile gösterilecektir.

Son olarak, genelleştirilmiş metrik uzaylarda $G\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $G\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtalım. Bu tanımların daha anlamlı olabilmesi adına ideal, filtre ve metrik uzaylarda ideal yakınsaklıkla ilgili temel bilgiler için [12] makalesine bakınız.

Tanım 4 [10]. (s_n), X uzayında bir dizi ve $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}^2$ nin altkümelerinden oluşan bir ideal olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_2$$

sağlanıyorsa (s_n) dizisi s noktasına $G\mathcal{I}$-yakınsaktır denir.

Tanım 5 [10]. (s_n), X uzayında bir dizi ve $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Her $\varepsilon, \delta > 0$ için,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : \frac{2}{n^2} \left|\left\{i,j \leq n : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

sağlanıyorsa, (s_n) dizisi s noktasına $G\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu koşulu sağlayan bütün dizilerin kümesi $GS(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

III. BULGULAR

Tanım 6. (s_n), X uzayında bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon, \delta > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \left|\left\{i,j \in I_r : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\} \in \mathcal{I}$$

sağlanıyorsa, (s_n) dizisi s noktasına $G\mathcal{I}$-lacunary istatistiksel yakınsaktır (ya da $GS_\theta(\mathcal{I})$-yakınsaktır) denir. Bu dizilerin kümesi $GS_\theta(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

Teorem 1. ℓ_∞, X uzayındaki bütün sınırlı dizilerin kümesi olmak üzere; $GS_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$ kümesi ℓ_∞ un kapalı bir altkümesidir.

Tanım 7 [4,5]. (s_n), X uzayında bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \sum_{i,j \in I_r} G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}$$

sağlanıyorsa, (s_n) dizisi s noktasına $GN_\theta(\mathcal{I})$-yakınsaktır denir ve bu dizilerin kümesi $GN_\theta(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

Teorem 2. (s_n), X uzayında bir dizi ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $s_n \to s\left(GN_\theta(\mathcal{I})\right)$ ise $s_n \to s\left(GS_\theta(\mathcal{I})\right)$.

(ii) $(s_n) \in \ell_\infty$ ve $s_n \to s\left(GS_\theta(\mathcal{I})\right)$ ise $s_n \to s\left(GN_\theta(\mathcal{I})\right)$.

(iii) $GS_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty = GN_\theta(\mathcal{I}) \cap \ell_\infty$.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ ve $s_n \to s\left(GN_\theta(\mathcal{I})\right)$ olsun.

$$\sum_{i,j \in I_r} G\left(s, s_i, s_j\right)$$

$$\geq \sum_{i,j \in I_r, G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon} G\left(s, s_i, s_j\right)$$

$$\geq \varepsilon \left|\left\{i,j \in I_r : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

ve buradan

$$\frac{2}{\varepsilon h_r^2} \sum_{i,j \in I_r} G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \frac{2}{h_r^2} \left|\left\{i,j \in I_r : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. O halde $\delta > 0$ için,

$$\left\{r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \left|\left\{i,j \in I_r : G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \delta\right\}$$

$$\subseteq \left\{r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \sum_{i,j \in I_r} G\left(s, s_i, s_j\right) \geq \varepsilon\,\delta\right\} \in \mathcal{I}$$

olduğundan $s_n \to s(GS_\theta(\mathcal{J}))$.

(ii) $(s_n) \in \ell_\infty$ ve $s_n \to s(GS_\theta(\mathcal{J}))$ olsun. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $G(s, s_i, s_j) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ için,

$$\frac{2}{h_r^2} \sum_{i,j \in I_r} G(s, s_i, s_j)$$

$$= \frac{2}{h_r^2} \sum_{i,j \in I_r, G(s,s_i,s_j) \geq \frac{\varepsilon}{2}} G(s, s_i, s_j) + \frac{2}{h_r^2} \sum_{i,j \in I_r, G(s,s_i,s_j) < \frac{\varepsilon}{2}} G(s, s_i, s_j)$$

$$\leq \frac{2M}{h_r^2} \left| \left\{ i, j \in I_r : G(s, s_i, s_j) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \sum_{i,j \in I_r} G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\}$$

$$\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \left| \left\{ i, j \in I_r : G(s, s_i, s_j) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \geq \frac{\varepsilon}{2M} \right\} \in \mathcal{J}$$

olup buradan $s_n \to s(GN_\theta(\mathcal{J}))$.

(iii) (i) ve (ii) den ispat açıktır.

Teorem 3. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için, (s_n) dizisi $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak ise $G\mathcal{J}$-lacunary istatistiksel yakınsaktır gerek ve yeter koşul $inf_r q_r > 1$.

İspat. Kabul edelim ki $inf_r q_r > 1$ olsun. O halde, yeterince büyük r değerleri için $q_r \geq 1 + \eta$ olacak şekilde $\eta > 0$ vardır ve

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\eta}{1 + \eta}$$

sağlanır. (s_n) dizisi $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak olduğundan . $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r değerleri için,

$$\frac{2}{k_r^2} \left| \left\{ i, j \leq k_r : G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\geq \frac{2}{k_r^2} \left| \left\{ i, j \in I_r : G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$= \left(\frac{h_r}{k_r} \right)^2 \frac{2}{h_r^2} \left| \left\{ i, j \in I_r : G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

$$\geq \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \frac{2}{h_r^2} \left| \left\{ i, j \in I_r : G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\} \right|$$

elde edilir. O halde $\delta > 0$ için,

$$\left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{2}{h_r^2} \left| \left\{ i, j \in I_r : G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \delta \right\}$$

$$\subseteq \left\{ r \in \mathbb{N} : \frac{2}{k_r^2} \left| \left\{ i, j \leq k_r : G(s, s_i, s_j) \geq \varepsilon \right\} \right| \geq \left(\frac{\eta}{1 + \eta} \right)^2 \delta \right\} \in \mathcal{J}$$

olduğundan (s_n) dizisinin $G\mathcal{J}$-lacunary istatistiksel yakınsak olduğu sonucuna varılır.

Uyarı 1. Eğer $inf_r q_r = 1$ ise, $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsak olacak biçimde bir (s_n) sınırlı dizisi vardır ancak bu dizi $G\mathcal{J}$-lacunary istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 4. $\mathcal{J}$, (AP) koşulunu sağlayan bir uygun ideal ve $\theta \in \mathcal{F}(\mathcal{J})$ olsun. Eğer $(s_n) \in GS(\mathcal{J}) \cap GS_\theta(\mathcal{J})$ ise, $GS(\mathcal{J}) - lims_n = GS_\theta(\mathcal{J}) - lims_n = s$.

IV. SONUÇLAR

Bu çalışmada genelleştirilmiş metrik uzaylarda tanımlanan lacunary istatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık ve $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsaklık kavramlarından yararlanarak bir dizinin $GS_\theta(\mathcal{J})$-yakınsak ve $GN_\theta(\mathcal{J})$-yakınsak olma tanımları verilmiştir. Ayrıca $GS_\theta(\mathcal{J})$-yakınsaklık ile $GN_\theta(\mathcal{J})$-yakınsaklık ve $G\mathcal{J}$-istatistiksel yakınsaklık ile $GS_\theta(\mathcal{J})$-yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] P. Das, E. Savaş, and S. K. Ghosal, “On generalizations of certain summability methods using ideals”, *Apply. Math. Lett.*, vol. 24, pp. 1509-1514, 2011.

[2] B.C. Dhage, “Generalized metric space and mapping with fixed point”, *Bull. Cal. Math. Soc.*, vol. 84, pp. 329-336, 1992.

[3] H. Fast, “Sur la convergence statistique”, *Colloq. Math.*, vol. 2, pp. 241-244, 1951.

[4] A.R. Freedman, J.J. Sember, and M. Rapnael, “Some Cesaro type summability spaces”, *Proc. Lond. Math. Soc.*, vol. 37, pp. 508–520, 1978.

[5] A.R. Freedman, and J.J. Sember, “Densities and summability”, *Pacific J. Math.*, vol. 95, pp. 293–305, 1981.

[6] J. A. Fridy, and C. Orhan, “Lacunary statistical convergence”, *Pasific J. Math.*, vol. 160, pp. 755-762, 1993.

[7] S. Gahler, “2-metriche raume und ihre topologische structure”, *Math. Nachr.*, vol. 26, pp. 115-148, 1963.

[8] S. Gahler, “Zur geometric 2-metriche raume”, *Reevue Roumaine de Math. Pures et Appl.*, vol. XI, pp. 664-669, 1966.

[9] M. B. Huban, and M. Gürdal, “Wijsman lacunary invariant statistical convergence for triple sequences via Orlicz function”, *J. Class. Anal.*, vol. 17 (2), pp. 119-128, 2021.

[10] S. Kolancı, and M. Gürdal, “G-metrik uzaylarda bazı yakınsaklık kavramları”, in *2nd ICCAR*, 2023, pp. 259-263.

[11] S. Kolancı, M. Gürdal, and Ö. Kişi, “G-metrik uzaylarda asimptotik lacunary denk diziler”, in *1st ICFAR*, 2023, pp. 211-216.

[12] P. Kostyrko, T. Salát, and W. Wilczynski, “I-Convergence”, *Real Anal. Exchange*, vol. 26 (2), pp. 669-686, 2000/2001.

[13] Ş. S. Küçük, and H. Gümüş, “The meaning of the concept of lacunary statistical convergence in *G*-metric spaces”, *Korean J. Math.*, vol. 30, pp. 679-686, 2022.

[14] Z. Mustafa, and B. Sims, “A new approach to generalized metric spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, vol. 7 (2), pp. 289-297, 2006.

[15] A. Nabiev, E. Savaş, and M. Gürdal, “Statistically localized sequences in metric spaces”, *J. Appl. Anal. Comput.*, vol. 9 (2), pp. 739-746, 2019.

[16] A. A. Nabiev, E. Savaş, and M. Gürdal, “I-localized sequences in metric spaces”, *Facta Univ. Ser. Math. Inf.*, vol. 35, pp. 459-469, 2020.

[17] E. Savaş, and P. Das, “A generalized statistical convergence via ideals”, *App. Math. Lett.* vol. 24, pp. 826-830, 2011.

[18] E. Savaş, and M. Gürdal, “I-statistical convergence in probabilistic normed spaces”, *Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, vol. 77 (4), pp. 195-204, 2015.

[19] A. Şahiner, M. Gürdal, and T. Yiğit, “Ideal convergence characterization of the completion of linear n-normed spaces”, *Comput. Math. Appl.*, vol. 61 (3), pp. 683-689, 2011.

[20] U. Yamancı, and M. Gürdal, “On lacunary ideal convergence in random n-normed space”, *J. Math., 2013*, Article ID 868457, 8 pages, 2013.

[21] U. Yamancı, and M. Gürdal, “I-statistically pre-Cauchy double sequences”, *Glob. J. Math. Anal.*, vol. 2 (4), pp. 297-303, 2014.